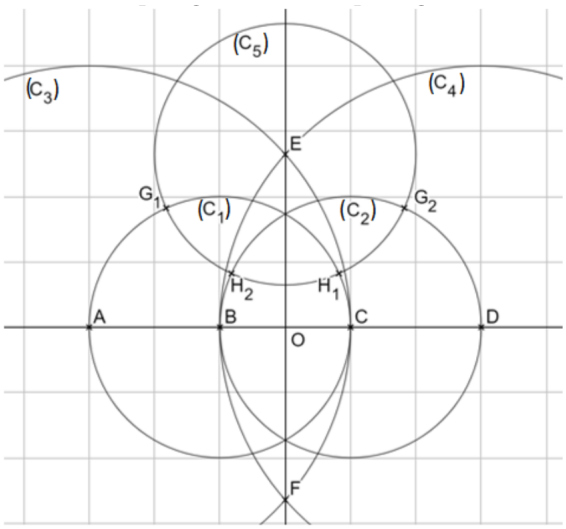
Corrigé Epreuve 1 Capes Mayotte 2022

Problème 1. Un pentagone non régulier

A. Construction d'un pentagone paveur On rappelle la figure de l'énoncé :



1. Remarquons que $OA = 3/2$, et $OD = 3/2$. De plus, E est à distance 2 de A (puisqu'il est sur le cercle C_3) et est à distance 2 de D (puisqu'il est sur le cercle C_4). Ainsi O et E sont deux points distincts sur la médiatrice de A et D. Par conséquent (OE) est la médiatrice de A et D et donc, en particulier (OE) est orthogonal à (AD). En particulier, le triangle ODE est rectangle en O. Par le théorème de Pythagore, $ED^2 = OE^2 + OD^2$ et donc

$$OE^2 = ED^2 - OD^2 = 4 - \frac{9}{4} = \frac{7}{4}.$$

Ainsi, on en déduit que $OE = \frac{\sqrt{7}}{2}$. En remarquant que E est d'ordonnée positive et sur l'axe des ordonnées, on en déduit que $\boxed{E \text{ a pour coordonnées } \left(0, \frac{\sqrt{7}}{2}\right)}$

2. Déterminons les grandeurs BG_1^2, G_1E^2 et BE^2. Le point G_1 étant sur le cercle C_1, on en déduit que $BG_1 = 1$ et donc $BG_1^2 = 1$. Le point G_1 étant sur le cercle C_5, on en déduit que $EG_1 = 1$ et donc $EG_1^2 = 1$. Pour finir

$$BE^2 = (x_E - x_B)^2 + (y_B - y_E)^2 = \frac{1}{4} + \frac{7}{4} = \frac{8}{4} = 2.$$

Ainsi, on obtient $BE^2 = BG_1^2 + G_1E^2$. En vertu de la réciproque du théorème de Pythagore, on en déduit que $\boxed{\text{le triangle } BG_1E \text{ est rectangle en } G_1}$

3. — *Equation cartésienne de C_1* Puisque C_1 est de centre B de coordonnées $(-\frac{1}{2}, 0)$ et de rayon 1, l'équation cartésienne est donnée par $(x + \frac{1}{2})^2 + (y - 0)^2 = 1$ et donc l'équation cartésienne est $x^2 + x + y^2 + \frac{1}{4} = 1$ ou encore $\boxed{x^2 + x + y^2 - \frac{3}{4} = 0}$

— *Equation cartésienne de C_5* Puisque C_5 est de centre E de coordonnées $(0, \frac{\sqrt{7}}{2})$ et de rayon 1, l'équation cartésienne est donnée par $(x - 0)^2 + (y - \frac{\sqrt{7}}{2})^2 = 1$ et donc l'équation cartésienne est $x^2 + y^2 - \sqrt{7}y + \frac{7}{4} = 1$ ou encore $\boxed{x^2 + y^2 - \sqrt{7}y + \frac{3}{4} = 0}$

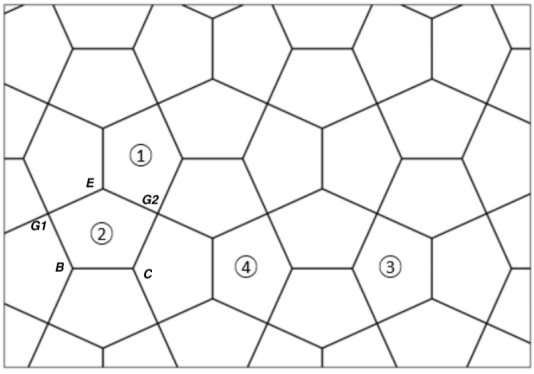
Soit (x, y) les coordonnées d'un point M quelconque. On a $M \in C_1 \cap C_5$ si et seulement si $\begin{cases} x^2+x+y^2-\frac{3}{4} &= 0 \\ x^2+y^2-\sqrt{7}y+\frac{3}{4} &= 0 \end{cases}$ si et seulement si $\begin{cases} x+\sqrt{7}y-\frac{3}{2} &= 0 \\ x^2+y^2-\sqrt{7}y+\frac{3}{4} &= 0 \end{cases}$ si et seulement si $\begin{cases} x &= \frac{3}{2}-\sqrt{7}y \\ 7y^2-3\sqrt{7}y+\frac{9}{4}+y^2-\sqrt{7}y+\frac{3}{4} &= 0 \end{cases}$ si et seulement si $\begin{cases} x &= \frac{3}{2}-\sqrt{7}y \\ 8y^2-4\sqrt{7}y+3 &= 0 \end{cases}$

Considérons l'équation polynomiale en y : $8y^2-4\sqrt{7}y+3=0$, elle est de discriminant $16\times 7-16\times 6=16=4$. Ainsi les solutions sont $y=\frac{4\sqrt{7}\pm 4}{16}$ et donc $y=\frac{\sqrt{7}\pm 1}{4}$. Il y a donc deux points dans l'intersection de C_1 et C_5 dont les coordonnées sont

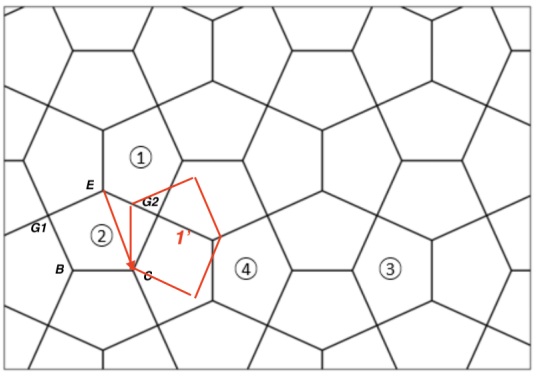
$$\left(\frac{\sqrt{7}-1}{4}, \frac{\sqrt{7}-1}{4}\right) \text{ et } \left(\frac{-\sqrt{7}-1}{4}, \frac{\sqrt{7}+1}{4}\right)$$

enfin, puisque G_1 est l'unique point dans l'intersection de C_1 et C_5 qui est de coordonnées négatives, on en déduit que $\boxed{G_1 \text{ a pour coordonnées } \left(\frac{-\sqrt{7}-1}{4}, \frac{\sqrt{7}+1}{4}\right)}$

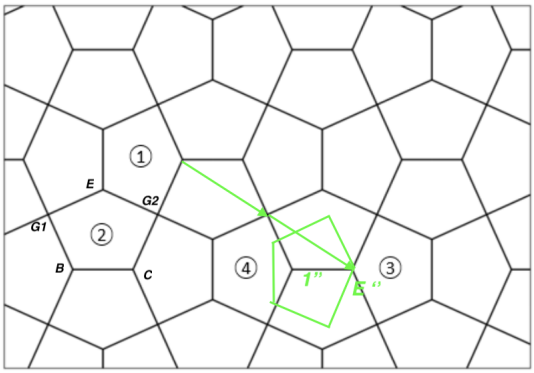
B. On rappelle la figure de l'énoncé en rajoutant les points sur le pentagone 2.



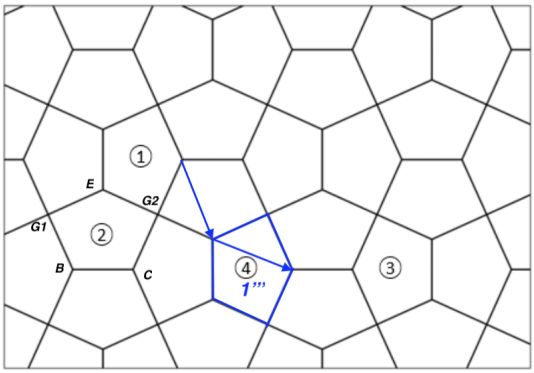
1. On trace le translaté $1'$ en rouge du pentagone 1 par le vecteur $\overrightarrow{EC}$. Ensuite, on voit qu'une rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$ permet d'obtenir le pentagone 2.



2. On trace le translaté $1''$ en vert du pentagone 1 par le vecteur $2\overrightarrow{G_1C}$. Ensuite, on voit qu'une rotation de centre E'' et d'angle π permet d'obtenir le pentagone 3.

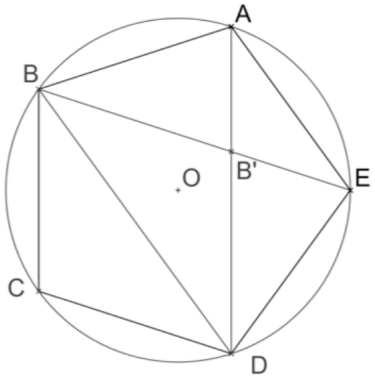


3. On trace le translaté $1'''$ en bleu du pentagone 1 par le vecteur $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{EG_2}$. On voit alors que le pentagone $1'''$ coincide avec le pentagone 4.



Problème 2. Le pentagone régulier

A. Triangle et nombre d'or On retrace la figure de l'énoncé



1. On rappelle que la somme des angles intérieurs d'un polygone convexe à n côtés est $(n-2)\pi$. Ainsi la somme des angles du pentagone régulier $ABCDE$ est de 3π. Or, puisque le pentagone est régulier les angles en A, B, C, D et E sont égaux à l'angle $\widehat{ABC}$ en B et donc $5\widehat{ABC} = 3\pi$ et $\widehat{ABC} = \frac{3\pi}{5}$.

2. Commençons par remarquer que le triangle AED est isocèle en E car $AE = 1 = ED$. Par suite, $\alpha = \widehat{DAE} = \widehat{EDA}$. De plus, $\widehat{AED} = \frac{3\pi}{5}$ (en vertu de la question précédente). Ainsi, en utilisant le fait que la somme des angles d'un triangle fait π, on en déduit que $2\alpha + \frac{3\pi}{5} = \pi$ et donc $\alpha = \frac{\pi}{5}$. En raisonnant de même, on en déduit que $\widehat{CBD} = \frac{\pi}{5} = \widehat{BDC}$. Remarquons que les triangles BCD et AED sont isométriques car isocèles avec la même longueur au sommet et, en particulier que $BD = AD$ et donc BAD est isocèle en D.
   Au final, on a $\widehat{CDE} = \frac{3\pi}{5}$ en vertu de la question précédente et donc $\widehat{EDA}+\widehat{ADB}+\widehat{BDC} = \frac{3\pi}{5}$ et donc $\boxed{\widehat{ADB} = \frac{\pi}{5}}$ Puisque le triangle BDA est isocèle, on en déduit que les angles β en B et A de ce triangle sont égaux. Ainsi, puisque la somme des angles de BDA fait π, $2\beta + \frac{\pi}{5} = \pi$ et donc $\boxed{\beta = \frac{2\pi}{5}}$

3. Puisque BAE est isocèle en A, et que $\widehat{BAE} = \frac{2\pi}{5}$, on en déduit, comme précédemment, que $\widehat{ABE} = \frac{\pi}{5}$. Nous avons vu que $\widehat{DAE} = \frac{\pi}{5}$, or $\widehat{BAE} = \frac{3\pi}{5}$ donc $\widehat{BAD} = \frac{2\pi}{5}$. Puisque la somme des angles d'un triangle fait π, on en déduit, en appliquant la règle dans le triangle BAD que $\widehat{AB'B} = \frac{2\pi}{5}$. On obtient donc les mêmes mesures d'angle que pour le triangle ABD dont nous avons mesuré les angles. D'où $\boxed{ABD \text{ et } AB'B \text{ sont semblables}}$

4. (a) Par la propriété des angles au sommet, $\widehat{BB'A} = \widehat{DB'E}$ et donc $\widehat{DB'E} = \frac{2\pi}{5}$. Nous avions calculé, $\widehat{ADE} = \frac{\pi}{5}$. Puisque la somme des angles du triangle $B'DE$ fait π, on en déduit que $\widehat{DEB'} = \frac{2\pi}{5}$. Ainsi le triangle $B'DE$ est isocèle en D et donc $DB' = DE = 1$. Or $AD = AB' + B'D$ d'où $AB' = AD - B'D$ et donc $\boxed{AB' = \varphi - 1}$

   On remarque que ABB' est isocèle en B ainsi $\boxed{AB = BB' = 1 \text{ et } AB' = \varphi - 1}$ On remarque que BDA est isocèle en D ainsi $\boxed{BD = AD = \varphi \text{ et } AB = 1}$

   (b) Nous avons vu à la question 3 que les triangles ABB' et BDA sont semblables. On en déduit que les rapports des longueurs des triangles sont constants et donc :

$$\frac{AB'}{BA} = \frac{B'B}{AD} = \frac{AB}{BD}$$

   et en particulier $\frac{\varphi - 1}{1} = \frac{1}{\varphi}$ et donc $\varphi^2 - \varphi = 1$ ou encore $\boxed{\varphi^2 - \varphi - 1 = 0}$

(c) Le discriminant de $X^2 - X - 1 = 0$ est $1 + 4 = 5$ et donc les racines sont $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Avec la question précédente, $\varphi = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Remarquons que $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ donc $\varphi \neq \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et donc, nécessairement, $\boxed{\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

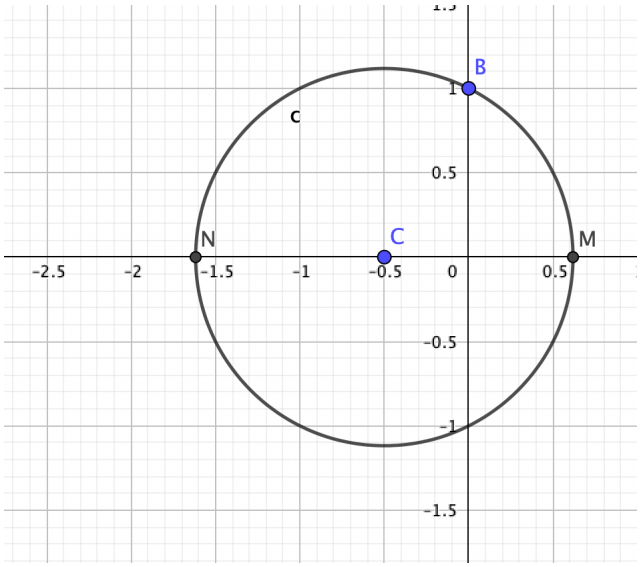
B. Une approche avec les nombres complexes

1. On a $\omega^5 = \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^5 = e^{2i\pi} = 1$. Ainsi $1 - \omega^5 = 0$ et $(1-\omega)(1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4) = 0$ or $\omega \neq 1$ donc $\boxed{1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4 = 0}$
On a
$$\alpha + \beta = \omega + \omega^4 + \omega^2 + \omega^3 = \underbrace{(1+\omega+\omega^4+\omega^2+\omega^3)}_{=0} - 1$$
d'où $\boxed{\alpha + \beta = -1}$ On calcule $\alpha\beta = \omega^3 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^7$ or $\omega^5 = 1$ donc $\alpha\beta = \omega^3 + \omega^4 + \omega + \omega^2$ et donc, d'après ce qui précède, $\boxed{\alpha\beta = -1}$
Notons P le polynôme $P(X) = (X-\alpha)(X-\beta)$. Il est clair que α et β sont racines de P. Remarquons que $P(X) = X^2 - (\alpha+\beta)X + \alpha\beta$ et donc $P(X) = X^2 + X - 1$ avec la question précédente. Au final, $\boxed{\alpha \text{ et } \beta \text{ sont solutions de } X^2 + X - 1 = 0}$

2. On a $\omega^5 = 1$ et donc $\boxed{\omega^4 = \frac{1}{\omega}}$ On a $\omega^4 = \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^4 = e^{i\frac{8\pi}{5}} = e^{2i\pi - i\frac{2\pi}{5}} = e^{-i\frac{2\pi}{5}}$. Ainsi $\omega^4 = \overline{\omega}$ et donc $\boxed{\frac{1}{\omega} = \overline{\omega}}$

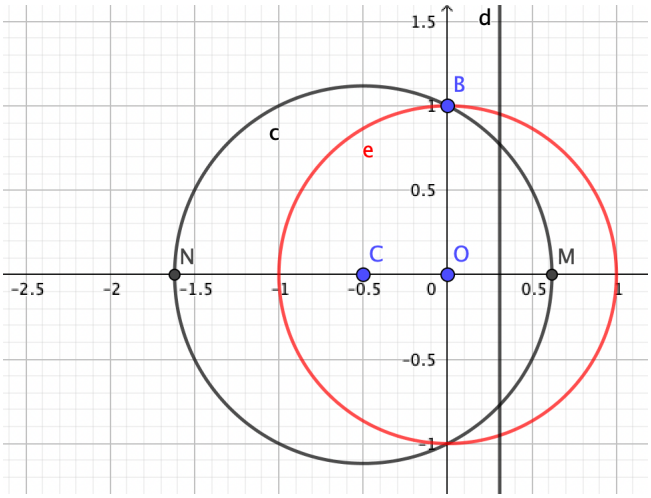
3. Nous avons que $\alpha = \omega + \omega^4 = \omega + \overline{\omega} = 2\Re(\omega)$. Or $\Re(\omega) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et donc $\boxed{\alpha = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}$
Résolvons l'équation [2] en commençant par calculer le discriminant. Le discriminant de cette équation $X^2 + X - 1 = 0$ est égal à 5 et les racines sont donc données par $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$. Parmi ces deux réels se trouve α en vertu de la question 1.
Or l'angle $0 \leq \frac{2\pi}{5} \leq \frac{\pi}{2}$ se trouve dans le cadran supérieur droit sur le cercle trigonométrique. En particulier $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$ et donc, nécessairement, $\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et par suite, $\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}}$

4. (a) Déterminons le rayon R du cercle de centre C et de rayon B. Par définition il s'agit de $|z_C - z_B| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Pour finir



on voit sur le dessin que l'abscisse de M sera donnée par $R - \frac{1}{2}$ et donc $\boxed{\text{l'abscisse de } M \text{ est } \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \alpha}$ et l'abscisse de N est donnée par $-\frac{1}{2} - R = -\alpha - 1$. Avec la question 1, on en déduit que $\boxed{\text{l'abscisse de } N \text{ est } \beta}$

(b) Traçons la médiatrice d de $[OM]$ sur notre figure et le cercle unité en rouge :

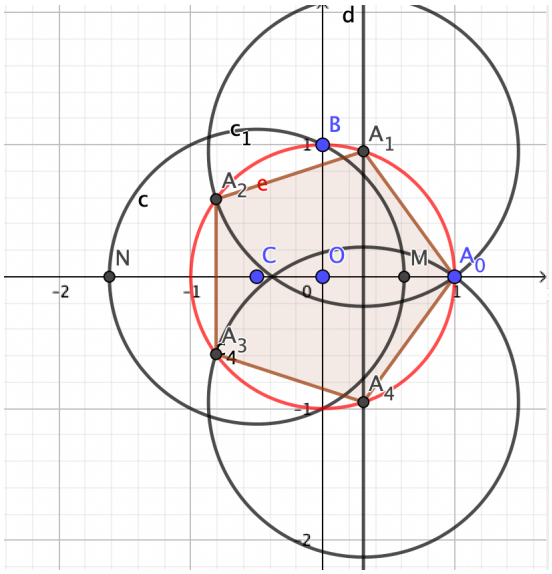


La médiatrice d est orthogonale à $\overrightarrow{OM}$ et donc à l'axe des abscisses. Par suite son équation cartésienne est donnée par $x = K$ où la constante K est à déterminer. Remarquons que le point de coordonnées $(\frac{\alpha}{2}, 0)$ appartient à d donc $K = \frac{\alpha}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. Ainsi les points sur la droite d sont d'abscisse $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Il y a deux points au plus sur l'intersection de d et le cercle unité, or on en connait deux, A_1 et A_4, par suite la médiatrice du segment $[OM]$ coupe le cercle unité en les points A_1 et A_4

Erreur d'énoncé, il faut lire A_4 au lieu de A_2

(c) Les points A_1 et A_4 sont construits à l'aide de la construction de la question précédente. Ensuite, le point A_0 est l'intersection du cercle unité et de l'axe des abscisses. Pour finir on trace c_1 le cercle de centre A_1 et de rayon A_0A_1 et c_4 le cercle de centre A_4 et de rayon A_0A_4. L'intersection de c_1 avec le cercle unité contient A_0 et A_2 et l'intersection de c_4 avec le cercle unité contient A_0 et A_3. D'où la construction du pentagone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4$:



Problème 3. urne de Polya

A Étude du cas $n = 3$

1. D'après les hypothèses, l'urne contient quatre boules au total dont une seul verte. On en déduit que $\boxed{\mathbb{P}(V_1) = \frac{1}{4}}$
2. Si l'on a tiré une boule verte au premier tirage alors pour le second tirage la composition sera donnée par deux boules vertes et trois boules blanches. Ainsi $\boxed{\mathbb{P}_{V_1}(V_2) = \frac{2}{5}}$ Si l'on a tiré une boule blanche au premier tirage alors pour le second tirage la composition sera donnée par une boule verte et quatre boules blanches. Ainsi $\boxed{\mathbb{P}_{\overline{V_1}}(V_2) = \frac{1}{5}}$
3. En vertu de la formule des probabilités conditionnelles,
$$\mathbb{P}_{V_1}(V_2) = \frac{\mathbb{P}(V_1 \cap V_2)}{\mathbb{P}(V_1)} \text{ et donc } \mathbb{P}(V_1 \cap V_2) = \mathbb{P}(V_1)\mathbb{P}_{V_1}(V_2)$$
ainsi avec les réponses aux deux questions précédentes $\boxed{\mathbb{P}(V_1 \cap V_2) = \frac{1}{10}}$ Par la formule des probabilités totales, appliquées au système complet d'événements $(V_1, \overline{V_1})$, on obtient :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V_2) &= \mathbb{P}(V_1)\mathbb{P}_{V_1}(V_2) + \mathbb{P}(\overline{V_1})\mathbb{P}_{\overline{V_1}}(V_2)\\ &= \frac{1}{10} + \frac{3}{20}\\ &= \frac{5}{20}\\ &= \boxed{\frac{1}{4}}\end{aligned}$$
4. On applique la formule de Bayes :
$$\mathbb{P}_{V_2}(V_1) = \frac{\mathbb{P}(V_1)\mathbb{P}_{V_1}(V_2)}{\mathbb{P}(V_2)}$$
et donc avec les probabilités trouvées aux questions précédentes, on en déduit que $\boxed{\mathbb{P}_{V_2}(V_1) = \mathbb{P}_{V_1}(V_2) = \frac{2}{5}}$ Ce résultat nous indique qu'il est autant probable d'avoir une boule verte au premier tirage qu'au deuxième.
5. Cette variable aléatoire est un entier naturel compris entre 0 et 3 puisque il y a au plus 3 tirages. Ainsi, $\boxed{\text{les valeurs possibles de } X_3 \text{ sont 0, 1, 2 et 3}}$
6. Il s'agit de calculer $\mathbb{P}(X_3 = k)$ pour $k = 0, 1, 2, 3$.
   — $k = 0$. On a $[X_3 = 0] = \overline{V_1} \cap \overline{V_2} \cap \overline{V_3}$. Avec la formule des probabilités composées :
   $$\mathbb{P}(X_3 = 0) = \mathbb{P}(\overline{V_1})\mathbb{P}_{\overline{V_1}}(\overline{V_2})\mathbb{P}_{\overline{V_1}\cap\overline{V_2}}(\overline{V_3})$$
   ensuite, $\mathbb{P}(\overline{V_1}) = \frac{3}{4}$ puis $\mathbb{P}_{\overline{V_1}}(\overline{V_2}) = \frac{4}{5}$ et $\mathbb{P}_{\overline{V_1}\cap\overline{V_2}}(\overline{V_3}) = \frac{5}{6}$ par conséquent, $\boxed{\mathbb{P}(X_3 = 0) = \frac{1}{2}}$
   — $k = 1$. On a $[X_3 = 1] = V_1 \cap \overline{V_2} \cap \overline{V_3} \cup \overline{V_1} \cap V_2 \cap \overline{V_3} \cup \overline{V_1} \cap \overline{V_2} \cap V_3$ où la réunion est disjointe. Ainsi
   $$\mathbb{P}(X_3 = 1) = \mathbb{P}(V_1 \cap \overline{V_2} \cap \overline{V_3}) + \mathbb{P}(\overline{V_1} \cap V_2 \cap \overline{V_3}) + \mathbb{P}(\overline{V_1} \cap \overline{V_2} \cap V_3)$$
   ensuite en appliquant la formule des probabilités composées, on obtient $\mathbb{P}(V_1 \cap \overline{V_2} \cap \overline{V_3}) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{6} = \frac{1}{10}$, $\mathbb{P}(\overline{V_1} \cap V_2 \cap \overline{V_3}) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{6} = \frac{1}{10}$ et $\mathbb{P}(\overline{V_1} \cap \overline{V_2} \cap V_3) = \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{10}$. Ainsi $\boxed{\mathbb{P}(X_3 = 1) = \frac{3}{10}}$
   — $k = 2$ On a $[X_3 = 2] = V_1 \cap V_2 \cap \overline{V_3} \cup \overline{V_1} \cap V_2 \cap V_3 \cup V_1 \cap \overline{V_2} \cap V_3$ où la réunion est disjointe. Ainsi
   $$\mathbb{P}(X_3 = 2) = \mathbb{P}(V_1 \cap V_2 \cap \overline{V_3}) + \mathbb{P}(\overline{V_1} \cap V_2 \cap V_3) + \mathbb{P}(V_1 \cap \overline{V_2} \cap V_3)$$

ensuite en appliquant la formule des probabilités composées, on obtient $\mathbb{P}(V_1 \cap V_2 \cap \overline{V_3}) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{20}$, $\mathbb{P}(\overline{V_1} \cap V_2 \cap V_3) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{20}$ et $\mathbb{P}(V_1 \cap \overline{V_2} \cap V_3) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{6} = \frac{1}{20}$. Ainsi $\boxed{\mathbb{P}(X_3 = 2) = \frac{3}{20}}$

— $k = 3$. On a $[X_3 = 3] = V_1 \cap V_2 \cap V_3$. Avec la formule des probabilités composées $\boxed{\mathbb{P}(X_3 = 3) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{20}}$

7. On a, par définition de l'espérance,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_3) &= \mathbb{P}(X_1 = 1) + 2\mathbb{P}(X_1 = 2) + 3\mathbb{P}(X_1 = 3)\\ &= \frac{6}{20} + \frac{6}{20} + \frac{3}{20}\\ &= \boxed{\frac{21}{20}}\end{aligned}$$

Pour la variance, rappelons la formule de Koenig-Huygens : $\mathbb{V}(X_3) = \mathbb{E}(X_3^2) - \mathbb{E}(X_3)^2$. Or par le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_3^2) &= \mathbb{P}(X_1 = 1) + 4\mathbb{P}(X_1 = 2) + 9\mathbb{P}(X_1 = 3)\\ &= \frac{6}{20} + \frac{12}{20} + \frac{9}{20}\\ &= \frac{27}{20}\end{aligned}$$

Ainsi $\mathbb{V}(X_3) = \frac{27\times 20 - 21\times 21}{4000} = \frac{6\times 21 - 27}{4000}$ d'où $\boxed{\mathbb{V}(X_3) = \frac{99}{4000}}$

B Etude de la composition de l'urne au bout de n opérations

1. Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
   — **Initialisation**. $n = 1$ Dans ce cas $[X_1 = 0] = \overline{V_1}$ qui est de probabilité $\frac{1}{2}$ et $[X_1 = 1] = V_1$ qui est de probabilité $\frac{1}{2}$. D'où l'initialisation.
   — **Hérédité**. Supposons le résultat vrai au rang n, montrons-le au rang $n+1$. Si $k = 0$ alors $[X_{n+1} = 0] = [X_n = 0] \cap \overline{V_{n+1}}$ ce qui en appliquant la formule des probabilités composées donne $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \mathbb{P}(X_n = 0) \times \mathbb{P}_{[X_n=0]}(\overline{V_{n+1}})$. Par hypothèse de récurrence, $\mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{1}{n+1}$ et si $[X_n = 0]$ alors l'urne contient, avant le $n+1$-ème tirage, $n+1$ boules blanches et 1 boule verte. Ainsi $\mathbb{P}_{[X_n=0]}(\overline{V_{n+1}}) = \frac{n+1}{n+2}$ et donc $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{n+2}$. Supposons maintenant $k > 0$. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X_n = 0], \ldots, [X_n = n])$ et l'on obtient alors :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \sum_{\ell=0}^{n} \mathbb{P}(X_n = \ell)\mathbb{P}_{[X_n=\ell]}(X_{n+1} = k)$$

remarquons alors que $\mathbb{P}_{[X_n=\ell]}(X_{n+1} = k) = 0$ si $\ell \neq k$ ou $\ell \neq k-1$ et que si $\ell = k$, $\mathbb{P}_{X_n=\ell}(X_{n+1} = k) = \mathbb{P}_{[X_n=k]}(\overline{V_{n+1}})$ ainsi que $\ell = k-1$, $\mathbb{P}_{[X_n=\ell]}(X_{n+1} = k) = \mathbb{P}_{[X_n=k-1]}(V_{n+1})$. Ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = k) &= \mathbb{P}(X_n = k)\mathbb{P}_{[X_n=k]}(\overline{V_{n+1}}) + \mathbb{P}(X_n = k-1)\mathbb{P}_{[X_n=k-1]}(V_{n+1})\\ &= \frac{1}{n+1}(\mathbb{P}_{[X_n=k]}(\overline{V_{n+1}}) + \mathbb{P}_{[X_n=k-1]}(V_{n+1}))\end{aligned}$$

en appliquant l'hypothèse de récurrence puis si $[X_n = k]$ est réalisé, l'urne contient avant le $n+1$-ème tirage, $k+1$ boules vertes et $n-k+1$ boules blanches donc $\mathbb{P}_{[X_n=k]}(\overline{V_{n+1}} = \frac{n-k+1}{n+2}$ et si $[X_n = k-1]$ est réalisé, l'urne contient avant le $n+1$-ème tirage, k boules vertes et $n-k+2$ boules blanches donc $\mathbb{P}_{[X_n=k-1]}(V_{n+1}) = \frac{k}{n+2}$ ainsi :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2}.$$

D'où la conclusion par récurrence

2. Au vu de la réponse à la question précédente, X_n suit une loi uniforme sur $\{0,\dots,n\}$. On a alors
$$\mathbb{E}(X_n)=\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X_n=k)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2(n+1)}=\frac{n}{2}.$$
En appliquant la formule de Koenig-Huygens : $\mathbb{V}(X_n)=\mathbb{E}(X_n^2)-\mathbb{E}(X_n)^2$. En appliquant le théorème de transfert :
$$\mathbb{E}(X_n^2)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n+1)}=\frac{n(2n+1)}{6}.$$
Ainsi $\mathbb{E}(X_n)=\frac{n}{2}$ et $\mathbb{V}(X_n)=\frac{n(n+2)}{12}$

3. Ci-dessous le script complété :

```
3  from random import *
4  def  proportion(n) :
5
6     (a,b)=(1,1)
7     for i in range (n) :
8       if random() < a/(a+b)
9           a=a+1
10      else :
11         b=b+1
12    return (a/(a+b))
13
```

Problème 4. Propriétés de la moyenne

A Propriétés de la moyenne d'une série statistique

1. On a $\boxed{m = \frac{n_1x_1+\cdots+n_px_p}{N}}$

2. Par définition, pour tout $1 \leq i \leq p$, $\min\limits_{1\leq i\leq p}(x_i) \leq x_i \leq \max\limits_{1\leq i\leq p}(x_i)$, ainsi

$$\frac{n_1 \min_{1\leq i\leq p}(x_i) + \cdots + n_p \min_{1\leq i\leq p}(x_i)}{N} \leq \frac{n_1x_1 + \cdots + n_px_p}{N} \leq \frac{n_1 \max_{1\leq i\leq p}(x_i) + \cdots + n_p \max_{1\leq i\leq p}(x_i)}{N}$$

ainsi :

$$\min_{1\leq i\leq p}(x_i)\frac{n_1 + \cdots + n_p}{N} \leq m \leq \max_{1\leq i\leq p}(x_i)\frac{n_1 + \cdots + n_p}{N}$$

remarquons que $N = n_1 + \cdots + n_p$ et donc on a bien $\boxed{\min_{1\leq i\leq p}(x_i) \leq m \leq \max_{1\leq i\leq p}(x_i)}$

3. (a) Par définition :

$$\begin{aligned} m' &= \frac{n_1y_1 + \cdots + n_py_p}{N} \\ &= \frac{n_1(ax_1+b) + \cdots + n_p(ax_p+b)}{N} \\ &= a\frac{n_1x_1 + \cdots + n_px_p}{N} + \frac{n_1 + \cdots + n_p}{N}b \\ &= \boxed{am+b} \end{aligned}$$

   (b) Notons y_i la série de ces relevés. Notons x_i les y_i décalés de 2 heures, 15 minutes et 39 secondes et l'on convertit en secondes. On obtient alors 0, 62, 71, 163, 177, 245, 248, 261, 275, 415, 471, 490, 511, 541, 568, 570, 606, 610, 617, 652. La moyenne m statistique des x_i est égale à 377.65 secondes ou encore 6 minutes et 17.65 secondes. Par ce qui précède, il suffit de rajouter 2 heures, 15 minutes et 39 secondes à m pour obtenir la moyenne des y_i qui est donc de 2 heures, 21 minutes et 56.65 secondes.

B Problème d'optimisation

1. On a

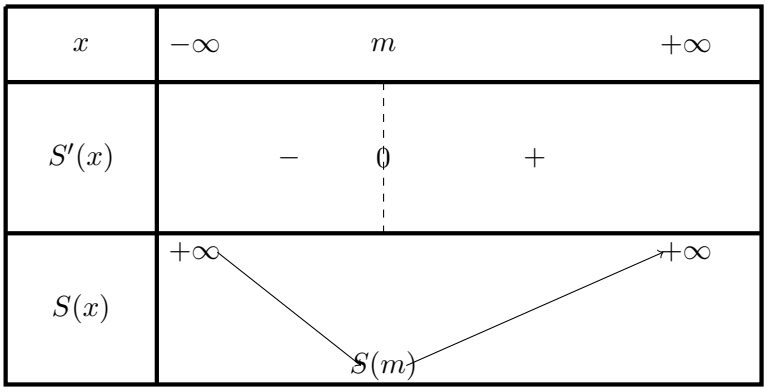
$$\begin{aligned} S(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i(x-x_i)^2 & \\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i(x^2 - 2xx_i + x_i^2) \\ &= x^2\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i - 2x\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_ix_i^2 \\ &= x^2 - 2mx + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_ix_i^2 \end{aligned}$$

   Ainsi, on retrouve bien un $\boxed{\text{polynôme de degré 2 en } x}$.

2. Calculons la dérivée de S :

$$S'(x) = 2x - 2m = 2(x-m)$$

   Par suite, on peut dresser le tableau de signe de S' puis le tableau de variations de S :



3. D'après le tableau de variations de S, on voit que le minimum de la fonction S est atteint en m. Ainsi le minimum de S est $S(m) = \sum_{i=1}^{p} \frac{n_i}{N}(m - x_i)^2$ ou encore $\boxed{S(m) = \sigma^2}$

4. Puisque S est définie comme une combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions carrés donc positives, on en déduit que $S \geq 0$. Par conséquent son discriminant doit être ≤ 0 et donc $4m^2 - \frac{4}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 \leq 0$ d'où $\boxed{m^2 \leq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2}$

Problème 5. Multiplication, racine treizième

A Table de neuf et preuve par neuf

1. (a) Il y a gauche du doigt $n-1$ doigts levés et à droit $10-n$ doigts levés

   (b) Considérons $9\times n = 10\times n - n = 10\times(n-1)+(10-n)$. Or $10-n$ est compris entre 0 et 9 et $10\times(n-1)$ est un multiple de 10 avec $n-1$ compris entre 0 et 9. Par suite $n-1$ est le chiffre des dizaines et $10-n$ le chiffre des unités de $9\times n$ d'où la validité de la méthode proposée avec ce qui a été fait à la question précédente.

2. (a) Ecrivons $A = \overline{a_n \dots a_0} = \sum_{i=0}^{n} a_i 10^i$ et $s(A) = \sum_{i=0}^{n} a_i$. On a alors

$$A - s(A) = \sum_{i=0}^{n} a_i 10^i - \sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n} a_i (10^i - 1)$$

   Or $10 = 1$ modulo 9 donc $10^i = 1^i = 1$ modulo 9 et donc $10^i - 1 = 0$ modulo 9. En particulier, 9 divise $10^i - 1$ pour tout $i \in \{0,\dots,n\}$ et donc $A - s(A)$ est divisible par 9. En particulier $A = s(A)$ modulo 9 et ces deux nombres ont bien le même reste dans la division euclidienne par 9

   (b) Si A est multiple de 9 alors $A = 0$ modulo 9 et l'on a vu à la question précédente que $A = s(A)$ modulo 9 donc $s(A) = 0$ modulo 9 et donc $s(A)$ est multiple de 9

3. On écrit d'abord $A = 9q_A + r(A)$ où $q_A \in \mathbb{N}$ et $0 \le r(A) \le 9$. De même $B = 9q_B + r(B)$ où $q_B \in \mathbb{N}$ et $0 \le r(B) \le 9$. Ce sont les divisions euclidiennes de A et B par 9. On a alors :

$$AB = 9(9q_Aq_B + q_Ar(B) + q_Br(A)) + r(A)r(B)$$

   écrivons ensuite la division euclidienne de $r(A)r(B)$ par 9 : $r(A)r(B) = 9q* + r(r(A)r(B))$ où $q* \in \mathbb{N}$ et $0 \le r(r(A)r(B)) \le 9$ on a donc :

$$AB = 9(9q_Aq_B + q_Ar(B) + q_Br(A) + q*) + r(r(A)r(B))$$

   avec $9q_Aq_B + q_Ar(B) + q_Br(A) + q* \in \mathbb{N}$ et $0 \le r(r(A)r(B)) \le 9$. Ainsi :

   $r(r(A)r(B))$ est le reste dans la division euclidienne de AB par 9

4. — Première multiplication : $39\times 47 = 1823$.
   On commence par calculer le reste de la division euclidienne de 39 par 9, d'après la question 2 (a) c'est le même que $3+9=12$ ou encore $1+2=3$ c'est donc 3. De même le reste de la division euclidienne de 47 par 9 est égal à celui de $4+7=11$ ou encore $1+1=2$. Ainsi le reste de la division euclidienne de 39×47 par 9 est 3×2.
   D'autre part, le reste de la division euclidienne de 1823 par 9 est le même que celui de $1+8+2+3=14$ ou encore $1+4=5$.
   Les restes de la division euclidienne de 39×47 par 9 d'une part et 1823 par 9 d'autre part sont différents, la preuve par 9 permet donc d'invalider cette opération
   — Seconde multiplication : $36\times 124 = 4644$.
   Le reste de la division euclidienne de 36 par 9 est le même que celui de $3+6=9$ et donc le reste de la division euclidienne de 36 par 9 est 0 et donc le reste de la division euclidienne de 36×124 par 9 est 0.
   D'autre part le reste de la division euclidienne de 4644 par 9 est le même que celui de $4+6+4+4=18$ ou encore le même que celui de $1+8=9$. Ainsi le reste de la division euclidienne de 4644 par 9 est 0.
   Les restes des divisions euclidiennes de 36×124 par 9 d'une part et de 4644 par 9 d'autre part sont égaux, la preuve par 9 ne permet donc pas d'invalider cette opération Pour autant on ne peut affirmer que l'opération est valide.

B Multiplication védique

1. Nous cherchons à calculer $(100-x)\times(100-y) = 10000-100(x+y)+xy = 100(100-(x+y))+xy$. Ainsi $\boxed{\text{on retrouve le produit et la somme de } x \text{ et } y \text{ dans ce produit}}$. Remarquons que si $0 \leq x \leq 9$ et $0 \leq y \leq 9$ alors $0 \leq xy < 99$ et $100-(x+y) \geq 0$ et xy permet donc d'avoir les chiffres des unités et dizaines et $100-(x+y)$ permet de retrouver les chiffres des centaines et milliers.

2. Soit n une quantité qui subit une augmentation de 3% puis une diminution de 2%. On obtient alors
$$\frac{98}{100} \times \frac{103}{100} \times n$$
Calculons $98\times103 = (100-2)(100+3)$ avec la méthode de la question précédente, on obtient : $103 = 100(100-2+3)-6 = 10100-6 = 10094$. Ainsi
$$\frac{98}{100} \times \frac{103}{100} \times n = \frac{10094}{100\times100} \times n = \frac{100+0.94}{100} \times n$$
et $\boxed{\text{cette quantité subit donc une augmentation de } 0.94\%}$

C Racine treizième et congruences

1. Distinguons deux cas. Si n est pair alors n^{13} et n sont pairs et donc $n^{13}-n$ est pair également. Si n est impair alors n^{13} et n le sont également et donc leur différence est paire. Dans tous les cas, $\boxed{A \text{ est pair}}$

2. (a) Rappelons que $x^k - 1 = (x-1)(1+x+x^2+\cdots+x^{k-1})$. On applique cela à $x = n^4$ et $k = 3$ et l'on obtient donc
$$(n^4)^3 - 1 = (n^4-1)(1+n^4+n^8)$$
D'où $\boxed{n^{12}-1 = (n^4-1)(1+n^4+n^8)}$

   (b) Si x est non divisible par 5 alors $x \equiv 1, 2, 3$ ou 4 [5]. Puisque $1^4 \equiv 1$ [5], $2^4 \equiv 16 \equiv 1$ [5], $3^4 \equiv (-2)^4 \equiv 2^4 \equiv 1$ [5] et $4^4 \equiv (-1)^4 \equiv 1$ [5]. Dans tous les cas, $\boxed{x^4 \equiv 1 \text{ [5]}}$

   (c) Remarquons que $A = n^13 - n = n(n^12-1)$. D'après la question (b), n^4-1 est divisible par 5 et d'après la question (a), n^4-1 divise $n^{12}-1$ et donc A. Par conséquent, 5 divise A. Or 2 divise 5 et 5 et 2 sont premiers entre eux donc $\boxed{10 = 2\times5 \text{ divise } A}$

3. (a) Puisque la fonction qui à n associe le nombre de chiffres de n^{13} est une fonction croissante (il s'agit de $n \mapsto \lfloor \log_{10}(n^{13}) \rfloor$ qui est composée de fonctions croissantes), on en déduit que la $\boxed{\text{racine treizième d'un nombre de 22 chiffres va se trouver entre 40 et 50}}$ dont les puissances treizièmes ont respectivement 21 et 23 chiffres.

   (b) Notons n le nombre tel que $n^{13} = N$. Remarquons que d'après la question (a), $40 \leq n \leq 50$. D'après la question 2 (c), $n^{13}-n = N-n$ est divisible par 10, en particulier, N et n ont le même chiffre des unités. Or N a pour chiffre des unités : 7 et donc n a pour chiffre des unités 7 également. On conclut en remarquant qu'il n'y a qu'un seul entier entre 40 et 50 dont le chiffre des unités est 7, $\boxed{\text{il s'agit de } 47}$